1.2.8 Třetí odmocnina

Předpoklady: 1207

Př. 1: Definuj třetí odmocninu z nezáporného čísla *a*.

Třetí odmocnina z nezáporného čísla *a*, je takové nezáporné číslo *x*, pro které platí: $x^3 = a$. Píšeme: $x = \sqrt[3]{a}$

Všechno podobné jako u druhé odmocniny.

Dodatek: Na rozdíl od druhé odmocniny je možné zavést třetí odmocninu i pro záporná čísla. Na střední škole však rozhodně takové zavedení nemá význam.

Př. 2: Urči následující třetí odmocniny. Pokud nejde hodnotu určit přesně, odhadni její velikost s přesností na celá čísla:
a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[3]{20}$ d) $\sqrt[3]{100}$

a) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

b) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

c) $2 < \sqrt[3]{20} < 3$, protože $8 < 20 < 27$

d) $4 < \sqrt[3]{100} < 5$, protože $64 < 100 < 125$

Pravidla pro počítání s odmocninami (stejná jako pro druhé odmocniny)

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ $\sqrt[3]{a+b} \rightarrow$ **<u>nedá se roztrhnout!!!!!!!</u>**

Pravidla můžeme použít pro výpočet těžších odmocnin:

Př. 3: Vypočti bez použití kalkulačky následující odmocniny: $\sqrt[3]{8000}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{216}$; $\sqrt[3]{729}$; $\sqrt[3]{3375}$.

$\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{1000} = 2 \cdot 10 = 20$

$\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{0,001} = 4 \cdot 0,1 = 0,4$

$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{27} = 3 \cdot 3 = 9$

$\sqrt[3]{3375} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{675} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 3 = 15$

Pedagogická poznámka: Než začnou studenti počítat předchozí příklad, zakazuju studentům pokusné násobení čísel na třetí, kterým se snaží najít správné výsledky. Tento postup vede k výsledkům pouze u předem připravených příkladů.

Pedagogická poznámka: Výpočet posledních tří odmocnin je bez kalkulačky zdlouhavý a obtížný, na druhou stranu vyžaduje postupné úpravy a cílevědomou práci. Navíc není na počátku příliš zřejmé, jak řešení dopadne a je zkrátka potřeba nějak začít. Což je právě to, co studenti příliš nedělají. Jakmile nevidí celé řešení radši nezačnou.

Stejně jako u druhých odmocnin mnohdy můžeme provést pouze částečné odmocňování:

Př. 4: Částečně odmocni: $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[3]{54}$.

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{3}$
$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$
$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

Můžeme upravovat součiny nebo podíly.

Př. 5: Zjednoduš součiny:
a) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{6}$
b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{16}$
c) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$
b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$
c) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 5 = 15\sqrt[3]{2}$

Př. 6: Zjednoduš podíly:
a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{135}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{27}} = \dfrac{2}{3}$
b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{135}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$

Podobně jako u druhé odmocniny i u třetí odmocniny se snažíme, aby se nevyskytovala ve jmenovatelích zlomků. Zlomky, které ji ve jmenovateli mají, usměrňujeme.

Př. 7: Usměrni zlomky:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{18}}$

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ k třetí odmocnině musím přidat dvakrát $\sqrt[3]{2}$, abych měl $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{18}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{6}$

Pedagogická poznámka: Studenti by se měli pokusit o objevení postupu usměrňování sami. Právě způsob, jakým se o to pokoušejí hodně napoví o tom, jak vůbec vnímají pravidla, o kterých se učí. Jestli je chápou i s jejich smyslem nebo je naopak berou jako mechanické, jednoúčelové záležitosti.

Těm, kteří řeší první příklad takto: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, připomenu, aby si číslo ve jmenovateli opravdu spočítali (většinou ho nepočítají, pouze předpokládají, že když potřebují ve výsledku 2, tak tam i vyjde), když provedou správnou úpravu: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}}$ sami rychle poznají co mají do rozšiřovacího zlomku přidat.

V bodech c) a hlavně d) jde zejména o to, aby zbytečně nerozšiřovali zlomky příliš velkými čísly.

Shrnutí: Třetí odmocnina je analogií druhé odmocniny.