0.9 - Nejčastější chyby při studiu

Mají pocit, že to chápou
Studenti mají při výkladu často pocit, že všemu rozumí. Není to z jejich strany žádná výmluva, opravdu ho mají, dokud jim nezadáte, aby něco udělali sami. Pak se zjistí opak. I když to „chápali“ nedokážou spočítat sami nic.
Je dobré zachovat se tak, aby to sami poznali (Upozornit je jednou dvakrát a pak je v tom nechat vykoupat).
Pokud to jde, není dobré moc dlouho povídat o tom:“jak to je“. Jednak Vás velká část z nich neposlouchá, jiná velká část z nich to „chápe“. Lepší je mluvit chvíli a nechat je to počítat samotné. Já je nechám bez nápovědy počítat i příklady, u kterých je skoro jisté, že na to nikdo nepřijde. Během počítání jednak opravdu něco dělají (dá se to kontrolovat) a jednak si já i oni můžeme zkoušet jestli to doopravdy „chápou“.
Pokud chcete probírat „přes příklady“, je nutné je předhazovat v takové posloupnosti, aby byly rozdíly malé a cestu mohli sledovat i ti pomalejší.
Tento problém je jedním z důvodů vzniku učebnice, proto jej učebnice v rámci možností docela uspokojivě řeší (výuka přes příklady, jejich obtížnost a řazení).

Jenom opisují
Studenti stejně jako všichni ostatní optimalizují své pracovní nasazení. Pokud je jejich hlavním cílem dosahování dobrých nebo přijatelných známek a pokud stačí se na písemky učit se večer před ní, je zbytečné o hodinách dávat pozor. Stačí jen přepisovat poznámky, které bude třeba přepsat do písemky. Velká část z nich o hodině ani nevnímá, co píše, mnohdy nejsou na konci hodiny schopni ani přibližně vysvětlit, co o ní dělali a psali do sešitu.
(Dobře to charakterizuje studentské hodnocení hodin jedné z kolegyň: „Ona se sice snaží to hezky vysvětlit, ale mi ji stejně neposloucháme, když o písemce musíme jen přepsat definice ze sešitu.“)
U matematiky to znamená, že každý příklad spočítaný u tabule (ať už učitelem nebo někým ze studentů), počítá pouze malá část třídy (ta, co to nejmíň potřebuje), většina příklady jenom opisuje, aby se je mohla večer před písemkou naučit.
Tento problém zdá se dobře řeší počítačová učebnice. Na tabuli píšu pouze výklad, příklady nepočítám a pouze promítám z počítače pro kontrolu. Většinu hodiny studenti pracují samostatně a já jim pomáhám.

To číslo bylo přece tady
Typickým příkladem studentského uvažování je sestavování vlastních hypotéz o fungování úprav. Většina z nich je založena na úvahách typu, když je jedno číslo tady, a pak tady, tak to znamená, že se vždycky to číslo přepíše z jednoho místa na druhé. Studentů pro něž matematika spočívá z přesunování čísel z jednoho místa na druhé není vůbec málo, základní školy tento způsob uvažování často podporují tím, že zavádí formule, které prostě fungují bez toho, aby někdo vysvětloval proč.
Nejlepší je, ukázat si to na příkladu.
Trvám na tom, aby studenti uměli řešit nerovnice typu $\frac{1}{x+3} > 2$ nejen převedením na součinový tvar (což už je trochu vyhýbání se problému s dělením na intervaly, který se pak často objevuje i v jiných souvislostech), ale i vynásobením nerovnice výrazem $(x+3)$ a tedy rozdělením výpočtu na dvě cesty podle znaménka tohoto výrazu. Typický ukázkový příklad vypadá takto:

Př: Vyřeš nerovnici $\frac{2}{x-3} < 1$ odstraněním zlomku.

Máme nerovnici $\frac{2}{x-3} < 1$, chceme ji vynásobit výrazem $(x-3)$, výraz však obsahuje neznámou a může být kladný i záporný. V obou těchto případech musíme postupovat různými způsoby (jednou znaménko nerovnosti zachováváme, podruhé ho obracíme), takže nám nebývá než rozdělit reálná čísla na dva intervaly, ve kterých je znaménko výrazu $(x-3)$ stále stejné a budeme v něm moci použít buď jeden nebo druhý postup.

Podmínka: $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

$x+3<0 \Rightarrow x<-3$

(násobím záporným číslem $\Rightarrow$ znaménko se mění)

$\frac{1}{x+3} > 2 \qquad /\cdot(x+3)$

$1 < 2(x+3)$

$1 < 2x+6$

$-5 < 2x$

$-\frac{5}{2} < x$

Zdá se, že řešením je interval $\left(-\frac{5}{2};\infty\right)$, počítám s čísly $x<-3$, v intervalu není žádné takové

$K_1 = \emptyset$

$x+3>0 \Rightarrow x>-3$

(násobím kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko zůstává)

$\frac{1}{x+3} > 2 \qquad /\cdot(x+3)$

$1 > 2(x+3)$

$1 > 2x+6$

$-5 > 2x$

$-\frac{5}{2} > x$

Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$, počítám s čísly $x>-3$, získám interval $\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

$K_2 = \left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

$K = K_1 \cup K_2 = \left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

Tomu nelze nic vytknout, bohužel v studentských hlavách zůstane asi toto:

Př: Vyřeš nerovnici $\frac{2}{x-3} < 1$ odstraněním zlomku.

Podmínka: $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

Pomocí té trojky uděláme intervaly a v nich to řešíme (těžko říct proč). Tam kde je $x<$ se znaménko obrací, tam kde je $x>$ se neobrací.

$x+3<0 \Rightarrow x<-3$

(mám tam $x<$ $\Rightarrow$ znaménko se mění)

$\frac{1}{x+3} > 2 \qquad /\cdot(x+3)$

$1 < 2(x+3)$

$1 < 2x+6$

$-5 < 2x$

$-\frac{5}{2} < x$

$x+3>0 \Rightarrow x>-3$

(mám tam $x>$ $\Rightarrow$ znaménko se zůstává)

$\frac{1}{x+3} > 2 \qquad /\cdot(x+3)$

$1 > 2(x+3)$

$1 > 2x+6$

$-5 > 2x$

$-\frac{5}{2} > x$

Zdá se, že řešením je interval $\left(-\frac{5}{2};\infty\right)$, počítám s čísly $x<-3$, v intervalu není žádné takové $K_1=\emptyset$	Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$, počítám s čísly $x>-3$, získám interval $\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$ $K_2=\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

$K=K_1\cup K_2=\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

Abych to zjednodušovačům trochu ztížil, dávám první příklady tohoto typu se všemi koeficienty stejnými. Například:

Př: Vyřeš nerovnici: $\frac{1}{x-1}\le 1$.

Podmínka: $x-1\ne 0\Rightarrow x\ne 1$

Potřebuji vynásobit nerovnici výrazem $(x-1)$, může být kladný i záporný, musím rozdělit řešení do dvou větví

$x-1<0\Rightarrow x<1$ (násobím záporným číslem $\Rightarrow$ znaménko se mění) $\frac{1}{x-1}\le 1 \quad /\cdot(x-1)$ $1\ge x-1$ $2\ge x$ Zdá se, že řešením je interval $(-\infty;2\rangle$, počítám s čísly $x<1$, z intervalu beru pouze $(-\infty;1)$ $K_1=(-\infty;1)$	$x-1>0\Rightarrow x>1$ (násobím kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko zůstává) $\frac{1}{x-1}\le 1 \quad /\cdot(x-1)$ $1\le x-1$ $2\le x$ Zdá se, že řešením je interval $\langle 2;\infty)$, počítám s čísly $x>1$, to jsou všechna, co vyšla $K_2=\langle 2;\infty)$

$K=K_1\cup K_2=(-\infty;1)\cup\langle 2;\infty)$

Tím se studentům trochu ztíží hledání „zjednodušených pravidel“ typu, „tohle dám odsud tam“.

Další příklady potom přidávám tak, aby se postupně chytali další zjednodušovací metody. Viz kapitola *2205 Nerovnice a úpravy nerovnic*.

Od první rovnice odečtu druhou

Jednou z metod, jak omezit množství pravidel, které si člověk musí pamatovat (a tím snížit pravděpodobnost neúspěchu, když Vám něco vypadne nebo to spletete), je zobecňovat a pamatovat si spíše obecná pravidla než jejich konkrétní aplikace (má to i oporu ve fungování lidské paměti, která spíše fandí údajům, jako, že Honza byl v řadě před Jardou než že Jarda byl patnáctý od začátku).

Já osobně se snažím používat zobecněná pravidla co nejvíce a vždy je přidávat ke konkrétním aplikacím. Například u rovnic vycházíme z toho, že se jedná o rovnost dvou čísel (zapsaným jako nějaké výrazy) a tudíž všechny úpravy musí ze stejných čísel udělat stejná čísla a z

různých čísla různá. Z toho pojetí snadno vyplývá, že umocňování není bezpečná operace, že umocňovat musíme celé strany rovnice (to jsou ta čísla), že můžeme odlogaritmovávat apod. Snažím se studenty vést k tomu, aby v případě nejistoty, zda je možné úpravu použít rozhodovali právě pomocí obecného pravidla.
Při výpočtu soustav rovnic (provádím ho maticovém zápisu, bez toho abych vysvětloval, co matice jsou. Matice Beru pouze jako usnadnění zápisu) se v první fázi soustava upravuje ze základního tvaru:

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=8\\ a-2b-c+2d&=4\\ 2a+b+c+3d&=17\\ 3a+2b-c+d&=10 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 8\\ 1 & -2 & -1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 3 & 17\\ 3 & 2 & -1 & 1 & 10 \end{array}$$

na trojúhelníkový tvar:

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=8\\ b+c-d&=-1\\ c-2d&=-7\\ d&=4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Z trojúhelníkového tvaru je možné soustavu ihned dopočítat. Převedení na trojúhelníkový tvar vede v maticovém zápisu k „vyrábění nul pod úhlopříčkou“ a z toho vyplyne nutnost odečítat násobky řádek mezi sebou případně přímo Gaussova eliminační metoda.
Naprostým šokem pro mě bylo, když jsem zjistil, že krásné pravidlo vyrábění nul zdegenerovalo na pravidlo: „místo druhé řádky napíšete druhou řádku bez první řádky, místo třetí řádky třetí řádku bez první řádky a tak dále“. (Jde v podstatě o Gausovu eliminační metodu na konkrétní soustavu, kde jsou všechny koeficienty před první neznámou rovné jedné.) Hezký postup, ale obecně k ničemu nevede.
Na moji připomínku, že jsme se učili jiné pravidlo – vyrábění nul, jsem se dozvěděl, že takové pravidlo je k ničemu, protože neříká, co mají dělat a musí se nad ním přemýšlet. Z následující hádky v podstatě vyplynulo, že správně se matematika (ale i jiné předměty) učí tak, že studenti vždycky ví, co mají dělat, a nemusí o písemkách vůbec přemýšlet.
Nenapadá mě žádné řešení. Přesně tohle jsou situace, kdy se dostáváte do konfliktu s jejich většinovou studijní zkušeností (tím nechci tvrdit, že se jim ostatní učitelé nesnaží vštěpovat, aby látce rozuměli. Jenom tvrdím, že skoro nikdo netrvá na tom, aby tomu rozuměli a oni tomu pak skutečně nerozumí a nepřemýšlení považují za přednost). Jenom si nikdo nesmí myslet, že když jim něco takového řeknete, že Vás budou poslouchat. Většinou čekají na něco jiného, nemusí to být správně, stačí když to bude jednoznačné a nebude to vyžadovat žádné přemýšlení.
Musíte tedy kontrolovat nejen to, co říkáte, ale i to, co si studenti vybírají k pamatování.

Vyhýbání se nepříjemnostem

Některé věci se studentům nelíbí, například záporné mocniny. Úprava výrazu $\left(\frac{ab^{-3}}{c^{-2}}\right)^{-2}$ na kladné mocniny by měla vypadat asi takto: $\left(\frac{ab^{-3}}{c^{-2}}\right)^{-2}=\frac{a^{-2}b^{6}}{c^{4}}=\frac{b^{6}}{a^{2}c^{4}}$. Část studentů však nesnáší záporné mocniny tak silně, že se jich radši zbaví nejdříve ze všeho a příklad potom vypadá takto $\left(\frac{ab^{-3}}{c^{-2}}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{a\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{c^2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{a}{b^3}}{\frac{1}{c^2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{ac^2}{b^3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{a^2c^4}{b^6}} = \frac{b^6}{a^2c^4}$. Teda v lepším případě, mnohdy se studenti ve zlomcích ztratí. Takovéhle obcházení používají studenti, pokud je necháte pracovat samostatně, velice často.

Mince má dvě strany. Když je necháte, budou si zbytečně komplikovat život a nenaučí se používat to, co jste právě probrali (většina obcházení se týká nových, nezažitých věcí). Pokud jim poručíte přesný postup, budou jen čekat na Vás a nebudou pracovat sami.

Já osobně se snažím blokovat jasné obcházení a zároveň jim nechávat pokud možno co největší svobodu. Většinou jim řeknu, co dělat nebudou (například u příkladu nahoře zakážu začínat likvidací záporných mocnin hned na začátku), nebo je nechám jeden příklad spočítat zdlouhavě, pak ukážu rychlejší řešení a nechám je počítat. Ale ani poté, co jim ukážete, že obcházení má daleko k jednoduchosti, je nemůžete nechat, protože oni se k obcházení rádi vrátí.

Učíme se příklady

Jedním z problémů v matematice (a fyzice) z pohledu studentů jsou příklady. Zatímco v jiných předmětech dá určitou práci vymyslet písemku tak, aby nevystačili s přepsáním textu ze sešitu, v matematice stačí zadat trochu jiný příklad a jsou v koncích.

Zásadním problém z hlediska studentů je způsob, jakým k příkladům přistupují – oni je berou jako něco, co se mají naučit. To není pravda. Příklady jsou něco na čem si zkouším, jak už to umím. Je zcela zbytečné se zabývat příkladem, který jsem samostatně spočítal (příště to s největší pravděpodobností dokážu také). U příkladu, který jsem nespočítal v naprosté většině případů stačí si zapamatovat fígl, který mě nenapadl a který mi musel někdo říct, abych to dal dohromady. Zbytek je opět pouhá vata, nad kterou nemá cenu ztrácet čas. Například u řešení rovnic, je po zvládnutí základů důležitá jedna maximálně dvě první řádky (jak to rozpohybovat) a dál už jde o opakování dávno známého.

Je potřeba to studentům říct a těm, co se podle toho nezačnou sami řídit, to opakovat. Vzhledem k tomu, že se týká něčeho, co dělají doma mimo Vaši kontrolu, není jisté, že uspějete, ale nic jiného než zkoušet to, nám stejně nezbývá.

„Průtokové učení"

Tohle je už bonbónek na závěr. Koncentrovanou esencí všech možných chyb při učení se je „průtokového učení" (samo se objasňující název). Něco jako manifest této učební metody jsem slyšel o jedné studentky z 4B2009.

Na konci prváku odvracela čtyřku jen s velkými potížemi, ani ve druháku se situace nelepšila. Jednou přinesla do kabinetu opravu písemky, bohužel nebyla schopna vysvětlit, co její výpočty znamenají a jaký mají smysl. Trochu jsem se do ní pustil, zeptal jsem se jí na několik základních věcí z prvního ročníku, které samozřejmě nevěděla (z matematiky i jiných předmětů). Nakonec jsem vyjádřil svůj názor, že strávila rok ve škole vlastně zbytečně, protože jednak si nic nepamatuje a jednak se nijak nezlepšila ve schopnosti se něčemu naučit. Studentka se bránila, že to není pravda, že její studijní postupy jsou daleko lepší než před příchodem na gymnázium. Na základní škole se totiž učila vždy celou stránku v sešitě nazpaměť najednou, zatímco na gymnáziu se dozvěděla, že je lepší si ji rozdělit na čtyři části a každou se učit zvlášť (ten systém opravdu funguje, protože mozek má tendenci si pamatovat

začátky a konce a takto jich má k dispozici více). Díky tomu se prý učí daleko efektivněji než dříve.
Tato studentka byla doopravdy přesvědčena, že učení se rovná zapamatování si. Oponoval jsem jí, že něco se naučit je daleko složitější než si to jenom zapamatovat. Bránila se, že v matice, to sice nefunguje, ale v ostatních předmětech jsou s ní spokojení (není to tak úplně pravda, ale je faktem, že nemá větší studijní problémy). Protože jsem nadále pochyboval, že by se tímto způsobem mohla něco naučit, rozhodla se mi předvést, že to jde, a začala mi přednášet Příchod Cyrila a Metoděje na Velkou Moravu (ze kterého byla zkoušena den předtím). Začala sebejistě: „první Přemyslovec Rostislav povolal roku 862 Cyrila a Metoděje na Moravu". Necitlivě jsem ji zastavil s tím, že Rostislav nebyl Přemyslovec. Chvíli jsme se o tom hádali, teprve když jsem ji to našel na internetu připustila, že nebyl Přemyslovcem. Pak už recitovala vcelku bez problémů, v mnoha podrobnostech jsem samozřejmě nebyl schopen ji kontrolovat. Pokazil jsem to až na konci, když jsem se ji zeptal: „Proč zval Rostislav kněze až se Soluně, když mohli přijet z daleko bližšího Řezna?" Na to samozřejmě odpovědět nedokázala, ale to nevadilo, protože „Žádnej dějepisář se mi na to nikdy ptát nebude, takový blbý otázky máš jenom Ty, dějepis je přece o tom, abych se naučila, kdy se co stalo". Dějepis je pro ni lepší než matematika, protože ví, že když se bude hodinu učit, dostane druhý den ze zkoušení při nejhorším dvojku a rodiče ji v pátek pustí na diskotéku.