

4.6.6 Složený sériový RLC obvod střídavého proudu

Předpoklady: 4212, 4605

Minulá hodina: odpor i indukance omezují proud ve střídavém obvodu, nemůžeme je však sčítat normálně, ale musíme použít Pythagorovu větu. Obě součástky totiž způsobují rozdílný posun proudu a napětí v obvodu \Rightarrow musíme vymyslet nějaký konzistentní postup, jak podobné příklady počítat, i v případě, že do obvodu přidáme kondenzátor.

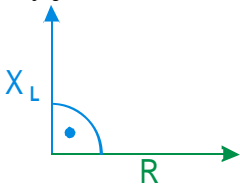
\Rightarrow co musí náš postup zachytit?

- u součástek není důležitý pouze jejich „odpor“, ale i fázový posun, který způsobují \Rightarrow musíme je popisovat pomocí obou čísel
- pro sériový RL obvod musíme dostat stejné výsledky jako v minulé hodině

Jak popsat součástky?

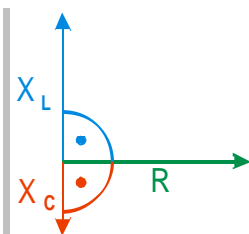
Musíme zachytit velikost (odpor, kapacitance, indukance) a fázový posun \Rightarrow taková dvě čísla charakterizují vektory \Rightarrow budeme zobrazovat všechny druhy impedancí (odpor, kapacitance, indukance) pomocí vektorů (**fázorů**) jejichž velikost odpovídá velikosti impedance a úhel, který svírají například s osou x , fázovému posunu, který způsobují.

My jsme tento obrázek použili již v minulé hodině:



modře je nakreslen fázor indukance, zeleně fázor odporu

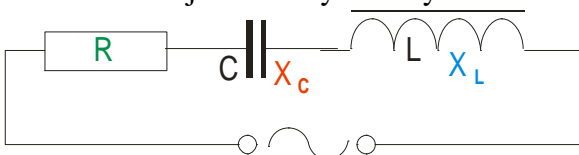
Př. 1: Dokresli do obrázku fázor kapacitance, jejíž velikost je poloviční s porovnání s velikostí indukance.



Fázor kapacitance má poloviční délku a směřuje opačně než fázor indukance (s fázorem odporu svírá -90° místo 90° , které s ním svírá fázor indukance).

Stejně jako u jednotlivých druhů impedancí můžeme fázory používat i pro napětí a proudy. Platí pro ně to samé, co platí pro fázory impedancí.

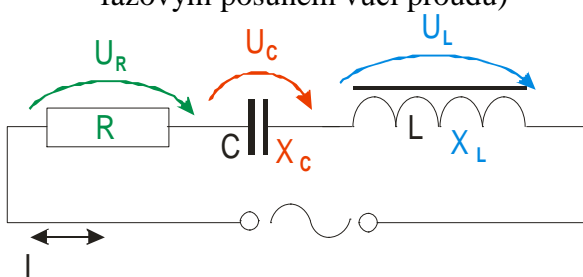
Nakreslíme si jednoduchý sériový RLC obvod (sériové zapojení odporu, cívky a kondenzátoru).



Tři součástky na obrázku, chceme spojit do jediné, která se z venku chová stejně.

\Rightarrow podobná situace jako při odvozování vzorce pro sériové zapojení rezistorů:

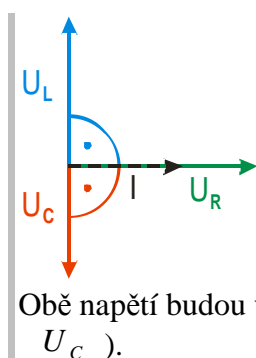
- všude stejný proud I
- na různých součástkách různá napětí U_R , U_L , U_C (liší se nejen velikostí, ale i fázovým posunem vůči proudu)



jednotlivá napětí nemůžeme normálně sečíst (kvůli fázovému posunu) \Rightarrow sečteme je pomocí fázorů \Rightarrow nakreslíme obrázek

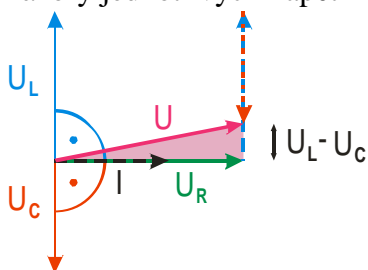


Př. 2: Dokresli do obrázku fázory napětí U_L , U_C . Předpokládej, že platí: $U_L > U_C$.



Obě napětí budou vůči napětí U_R i proudu I posunutá o 90° (napětí U_L) a -90° (napětí U_C).

Fázory jednotlivých napětí můžeme graficky snadno sečíst:



Velikost výsledného napětí můžeme určit z pravoúhlého růžového trojúhelníku:

$$\begin{aligned}
 U^2 &= U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \\
 (I \cdot Z)^2 &= (I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L - I \cdot X_C)^2 \\
 I^2 \cdot Z^2 &= I^2 \cdot R^2 + I^2 (X_L - X_C)^2 \\
 Z^2 &= R^2 + (X_L - X_C)^2 \\
 Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}
 \end{aligned}$$

Shrnutí: V sériovém RLC obvodu platí:

- Impedance („celkový odpor“): $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (na znaménku výrazu

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \text{ nezáleží})$$

- Fázový posun: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ (znaménko výrazu $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ nám určuje směr fázového posunu)
- Ohmův zákon: $I = \frac{U}{Z}$

Př. 3: Urči proud, který prochází sériovým obvodem s reálnou cívkou $2,5 \Omega$, $0,012 \text{ H}$ a kondenzátorem $50 \mu\text{F}$ po připojení ke zdroji napětí 5 V 50 Hz . Jaký bude fázový posun mezi napětím a proudem?

Dosadíme do vzorců pro sériový RLC obvod:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2,5^2 + \left(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,012 - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}\right)^2} \Omega = 60 \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,012 - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}}{2,5} = -24$$

$$\varphi = -87^\circ 37'$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{5}{60} \text{ A} = 0,083 \text{ A}$$

Př. 4: Urči celkovou impedanci předchozího obvodu, fázový posun a proud, který prochází obvodem, pro frekvence další frekvence zdroje 100 Hz , 200 Hz , 300 Hz a 500 Hz ?

Jde o pouhé dosazování do vzorců z předchozího příkladu. Měníme pouze hodnotu frekvence:

frekvence f	Celková impedance Z	fázový posun φ	proud I
50 Hz	60	$-87^\circ 37'$	0,083
100 Hz	24,4	-78°	0,2
200 Hz	2,64	-18°	1,9
300 Hz	12,3	78°	0,41
500 Hz	31,4	86°	0,16

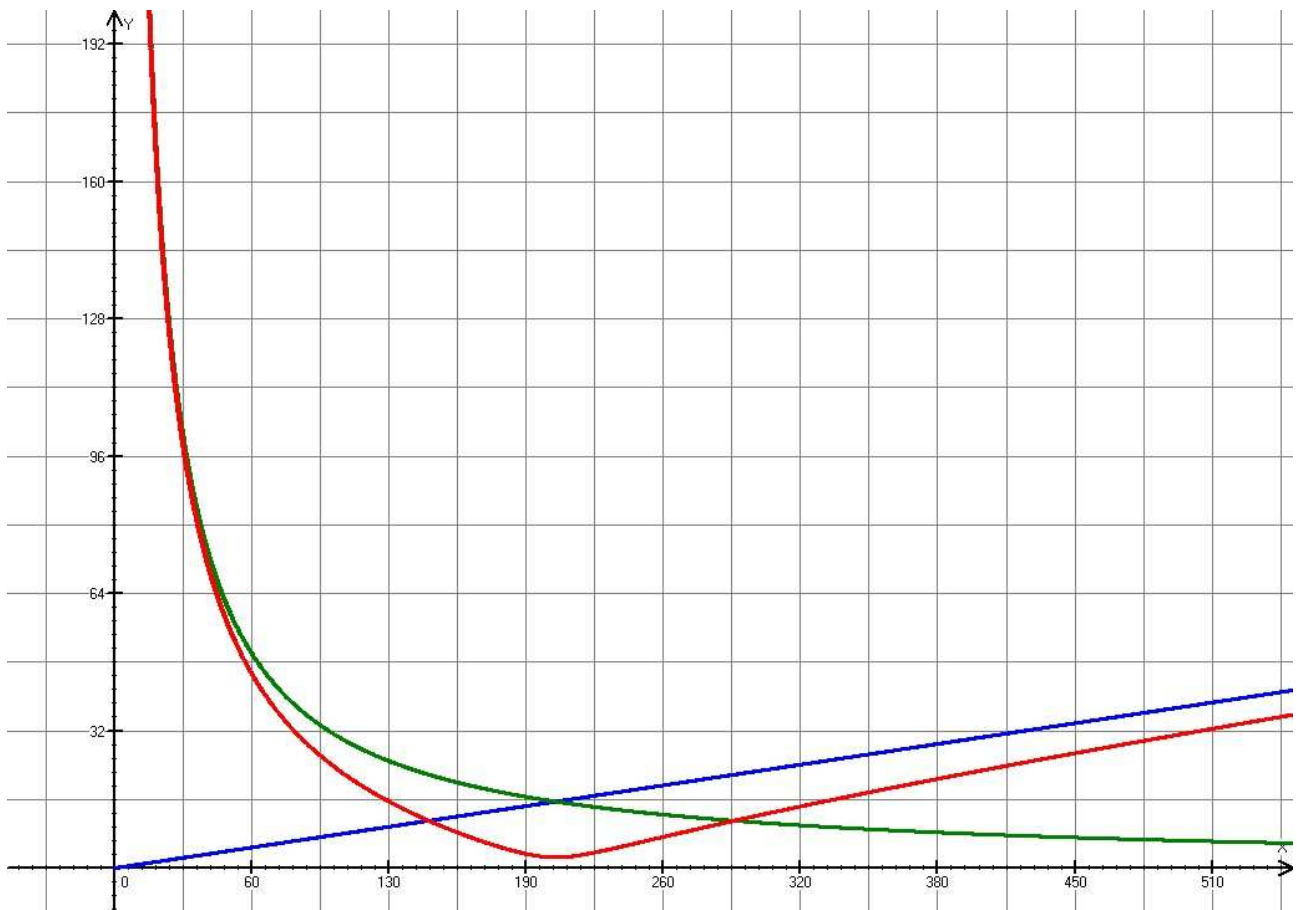
Z tabulky je vidět, že se vzrůstající frekvencí nejdříve impedance klesá a pak zase roste. Záporná hodnota fázového posunu se zmenšuje a pak začne narůstat do kladných hodnot.

Je to logické:

- při frekvenci 50 Hz je větší kapacitance kondenzátoru než induktance cívky, proto se obvod chová jako kondenzátor (záporný fázový posun)
- s rostoucí frekvencí se kapacitance kondenzátoru zmenšuje a induktance cívky roste \Rightarrow při určité frekvenci se vyrovnají a impedance obvodu se rovná odporu rezistoru, fázový posun je v tomto okamžiku nulový
- při dalším zvyšování frekvence induktance dále roste (kapacitance se dále zmenšuje) \Rightarrow obvod se chová jako cívka (kladný fázový posun)

Ještě lépe to bude vidět z grafů:

graf závislosti induktance, kapacitance a impedance na frekvenci



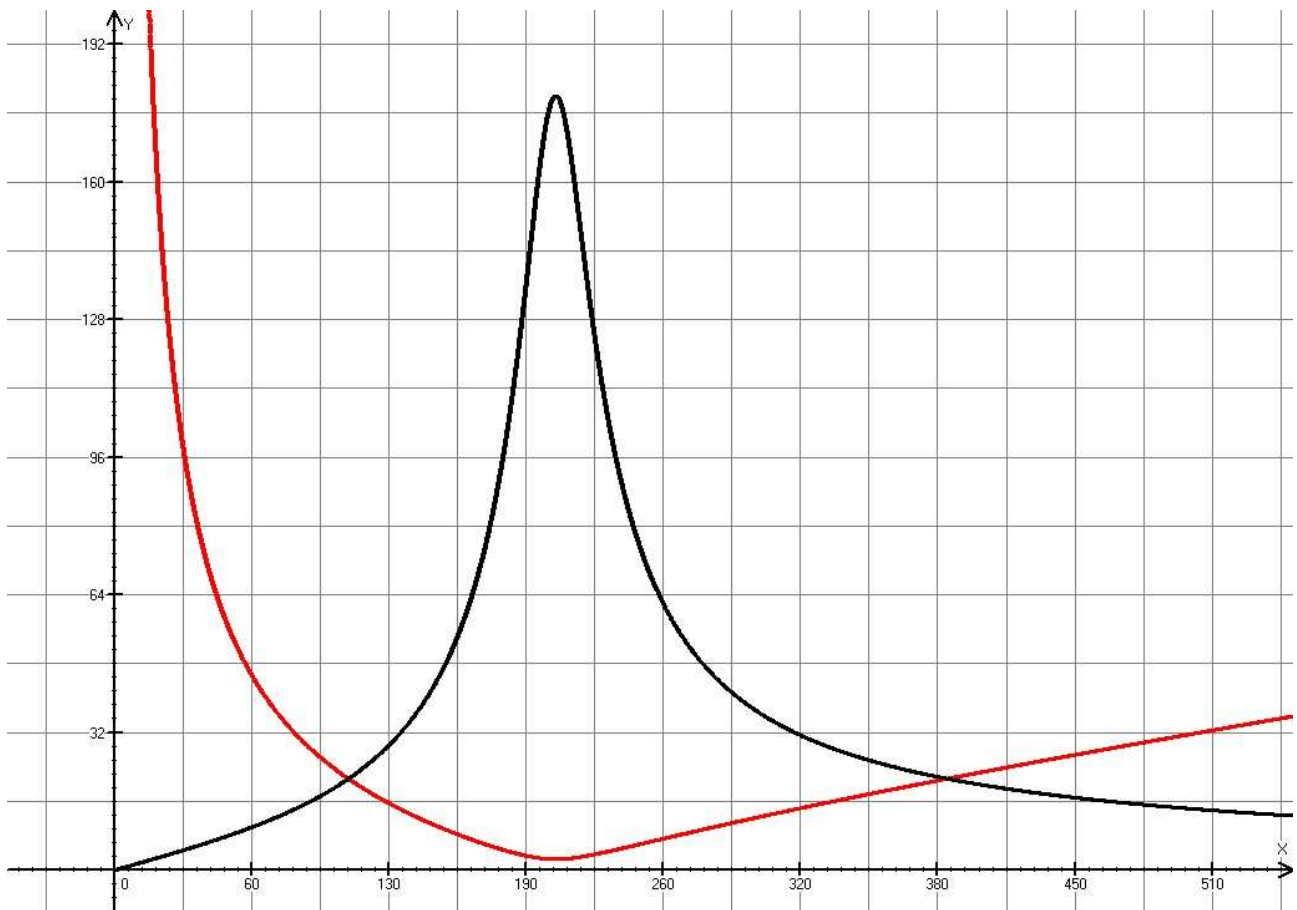
Př. 5: Urči barvy, kterými jsou na předchozím grafu zakresleny jednotlivé veličiny (kapacitance, induktance a impedance).

induktance s frekvencí roste přímo úměrně \Rightarrow je nakreslena modrou barvou

kapacitance s frekvencí klesá nepřímo úměrně \Rightarrow je nakreslena zeleně

impedance nejdříve klesá, pak opět roste \Rightarrow je nakreslena červeně

Na hodnotě impedance samozřejmě závisí velikost procházejícího proud, která je největší při nejmenší impedanci:



Frekvenci, při které je impedance minimální a procházející proud maximální nazýváme **rezonanční frekvence**.

Př. 6: Odvod' vztah pro rezonanční frekvenci sériového RLC obvodu.

K rezonanci dochází, když se kapacitance rovná induktanci.

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Př. 7: Urči rezonanční frekvenci sériového obvodu s reálnou cívkou $2,5 \Omega$, $0,012 \text{ H}$ a kondenzátorem $50 \mu \text{ F}$. Porovnej výsledek s předchozími příklady.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,012 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} \text{ Hz} = 205 \text{ Hz}$$

Výsledná frekvence odpovídá předchozím příkladům (rezonanční frekvence se musí nacházet mezi 100 a 300 Hz, graf impedance má minimum kolem hodnoty 200 Hz)

Shrnutí: Při výpočtu celkové impedance sériového RLC obvodu postupujeme podobně jako při výpočtu celkového odporu sériově zapojených rezistorů. Sčítat jednotlivá napětí ale musíme pomocí fázorů.