3.2.2 Rovnice postupného vlnění

Předpoklady: 3102, 3201

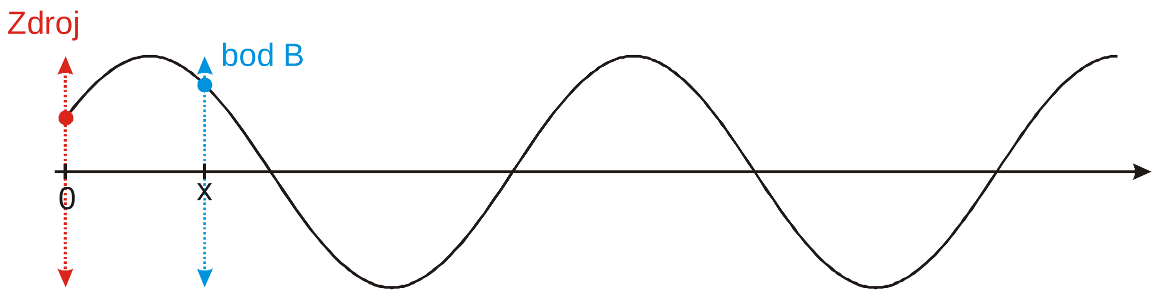
Chceme najít rovnici, která bude udávat výšku vlny v libovolném okamžiku i libovolném bodě (v jednom okamžiku je v různých místech různá výška vlny).

Veličiny popisující vlnění (hodnoty budou pro jedno vlnění stejné pro všechna místa ve všech okamžicích):

- perioda
- maximální výchylka
- rychlost šíření
- vlnová délka

Veličiny popisující místo a čas, které mě zajímají (dosadím do rovnice, abych získal konkrétní údaje):

- čas
- poloha



Každý bod kmitá.

Zdroj: $y = y_m \sin(\omega t)$ - známe, rovnice kmitavého pohybu

Bod B: kmitá „stejně" jako zdroj, ale o něco později. Tento rozdíl označíme $\Delta t \Rightarrow$

$y = y_m \sin[\omega(t - \Delta t)]$

Δt - přibylo, protože bod B je pozadu, chvíli trvá než se k němu vlnění dostane, na čem Δt závisí?

- rychlost šíření vlnění v
- vzdálenost bodu B od zdroje x

$\Rightarrow \Delta t = \frac{x}{v}$, dosadíme do rovnice pro B: $y = y_m \sin[\omega(t - \Delta t)]$

$y = y_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$ rozepíšeme $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$y = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$

$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv}\right)$ použijeme $\lambda = vT$

$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ - **rovnice postupného vlnění** (udává okamžitou výchylku v závislosti na čase a poloze)

Důležité:

- t, x - neznámé, za které dosazujeme (v jaké okamžiku a na kterém místě, chceme znát výšku vlny)
- y_m, T, λ - parametry, které jsou pro dané vlnění stále stejné

Poznámka: Námi uvedená rovnice platí pro vlnění, které se šíří ve směru osy x (od menších hodnot x ke větším). Pro vlnění opačného směru je nutno změnit znaménko před členem $\frac{x}{\lambda}$ $y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$).

Pedagogická poznámka: Předchozí rozlišení neznámých a parametrů je nutné studentům zdůraznit. Rozdílná role písmenek v rovnici je jedním z největších problémů při jejím pochopení.

Př. 1: Vysvětli jaký je rozdíl mezi t a T v rovnici postupného vlnění $y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

t – čas, ve kterém chceme zjistit stav vlnění, volíme si ho dle libosti
T – perioda kmitavého pohybu, který vlnění způsobuje. Je pro dané vlnění stále stejná.

Jak fungují zlomky v závorce?

- $\frac{t}{T} = k \in Z$ (celé číslo) $\Rightarrow$ $\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \sin 2\pi k = 0$, právě když $t = kT$ - zopakoval se určitý počet celých period (a proto začíná vlnění opět s počáteční fází)
- $\frac{x}{\lambda} = k \in Z$ (celé číslo) $\Rightarrow$ $\sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = \sin 2\pi k = 0$, právě když $x = k\lambda$ - posunuli jsme se o určitý počet celých vlnových délek (a proto vlnění kmitá v našem bodě se stejnou fází jako v počátku)

Př. 2: Vlnky na vodní hladině se šíří rychlostí $0{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ s periodou 0,6 sekundy. Napiš rovnici tohoto postupného vlnění, pokud maximální výška vlny dosahuje 3 cm.

Rovnice postupného vlnění: $y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Známe: $y_m = 3\,\mathrm{cm} = 0{,}03\,\mathrm{m}$, $T = 0{,}6\,\mathrm{s}$.
Musíme určit λ.
$\lambda = vT = 0{,}1 \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} = 0{,}06\,\mathrm{m}$.

Dosadíme do rovnice $y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}03 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}06}\right)$

Př. 3: Vlnění na vodní hladině je popsáno rovnicí $y = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}12}\right)$.

a) Urči hodnoty y_m, T, λ, v.
b) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti 0 – 15 cm v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Předpokládej, že v čase $0\,\mathrm{s}$ jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.
c) Urči v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ výšku vodní hladiny v bodech $x = 0; 3; 9; 11; 13$. Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu b).
d) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti 0 – 15 cm v čase $t = 0{,}45\,\mathrm{s}$. Předpokládej, že v čase $0\,\mathrm{s}$ jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.
e) Urči v čase $t = 0{,}45\,\mathrm{s}$ výšku vodní hladiny v bodech $x = 0; 3; 9; 11; 13$. Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu d).

a) Urči hodnoty y_m, T, λ, v.

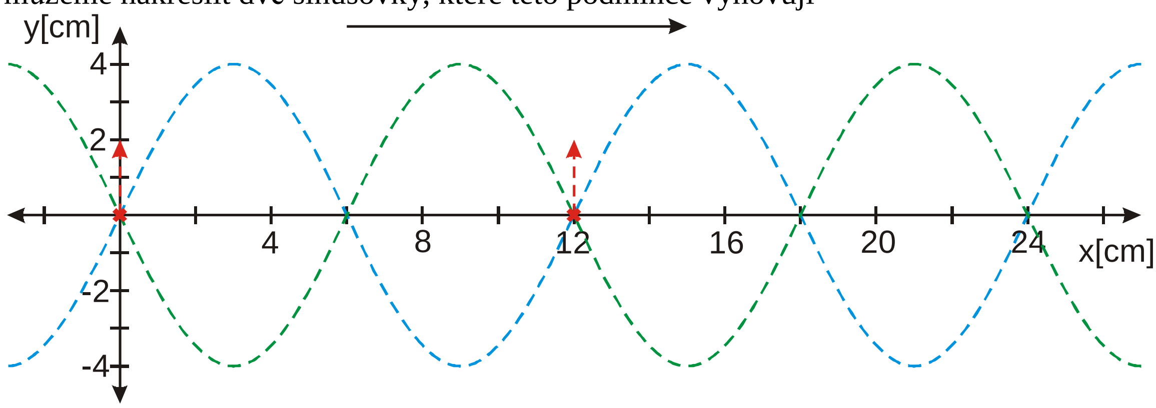
Obecná rovnice: $y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, naše rovnice $y = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}12}\right)$

srovnáním získáme:

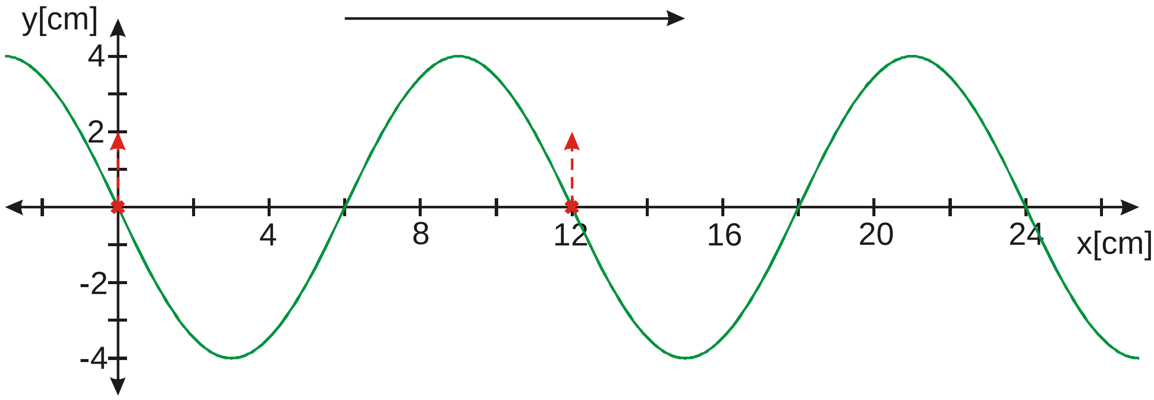
- $y_m = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- $T = 0{,}6\,\mathrm{s}$
- $\lambda = 0{,}12\,\mathrm{m}$
- $\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}12}{0{,}6}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti 0 – 15 cm v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Předpokládej, že v čase $0\,\mathrm{s}$ jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.

v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ se bod v počátku nachází v na začátku sínusovky s nulovou výchylkou, stejnou fázi bude mít pohyb bodu, který se nachází o jednu vlnovou délku (0,12 m) dále vpravo $\Rightarrow$ můžeme nakreslit dvě sínusovky, které této podmínce vyhovují



vlnění se šíří vpravo, vyznačené body se pohybují směrem nahoru (jsou na začátku periody) $\Rightarrow$ správná je zelená křivka

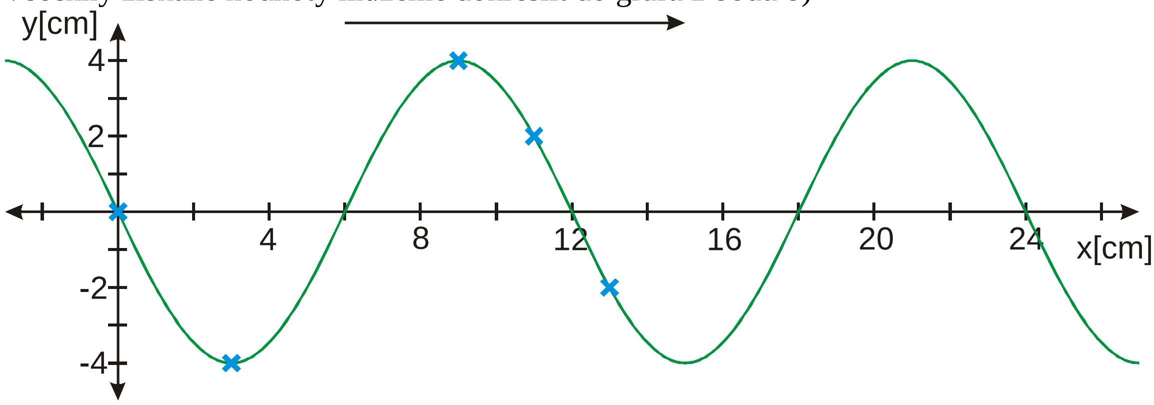


c) Urči v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ výšku vodní hladiny v bodech $x = 0;\ 3;\ 9;\ 11;\ 13\,\mathrm{cm}$. Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu b).

do rovnice vlnění dosazujeme $t = 0\,\mathrm{s}$ a:

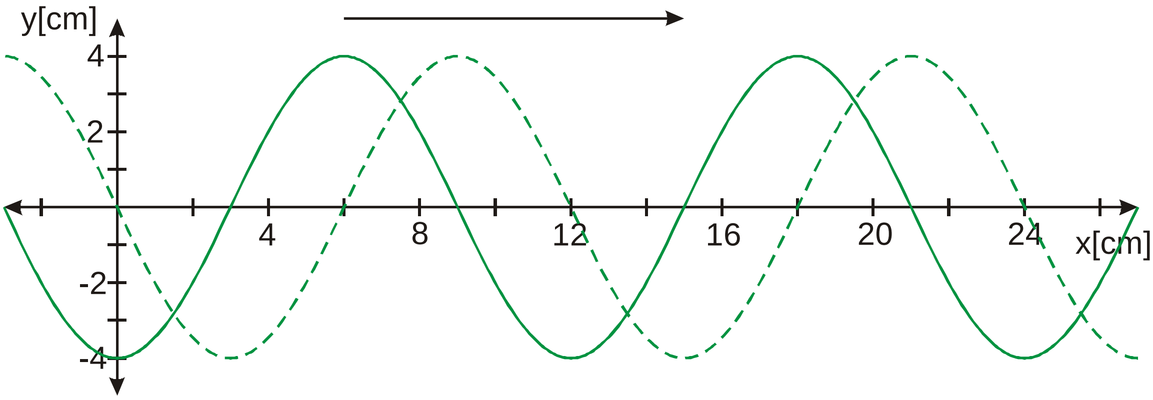
- $x = 0\,\mathrm{m}:\ y = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}12}\right) = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{0}{0{,}6} - \frac{0}{0{,}12}\right)\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m}$
- $x = 0{,}03\,\mathrm{m}:\ y = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}12}\right) = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{0}{0{,}6} - \frac{0{,}03}{0{,}12}\right)\mathrm{m} = -0{,}04\,\mathrm{m}$
- $x = 0{,}09\,\mathrm{m}:\ y = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}12}\right) = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{0}{0{,}6} - \frac{0{,}09}{0{,}12}\right)\mathrm{m} = 0{,}04\,\mathrm{m}$
- $x = 0{,}11\,\mathrm{m}:\ y = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}12}\right) = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{0}{0{,}6} - \frac{0{,}11}{0{,}12}\right)\mathrm{m} = 0{,}02\,\mathrm{m}$
- $x = 0{,}13\,\mathrm{m}:\ y = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}12}\right) = 0{,}04 \sin 2\pi\left(\frac{0}{0{,}6} - \frac{0{,}13}{0{,}12}\right)\mathrm{m} = -0{,}02\,\mathrm{m}$

Všechny získané hodnoty můžeme dokreslit do grafu z bodu b)



d) Nakresli výšku vodní hladiny v oblasti 0 – 15 cm v čase $t = 0{,}45\,\mathrm{s}$. Předpokládej, že v čase $0\,\mathrm{s}$ jsme začali měřit, ale vlnění se po hladině šířilo již dříve.

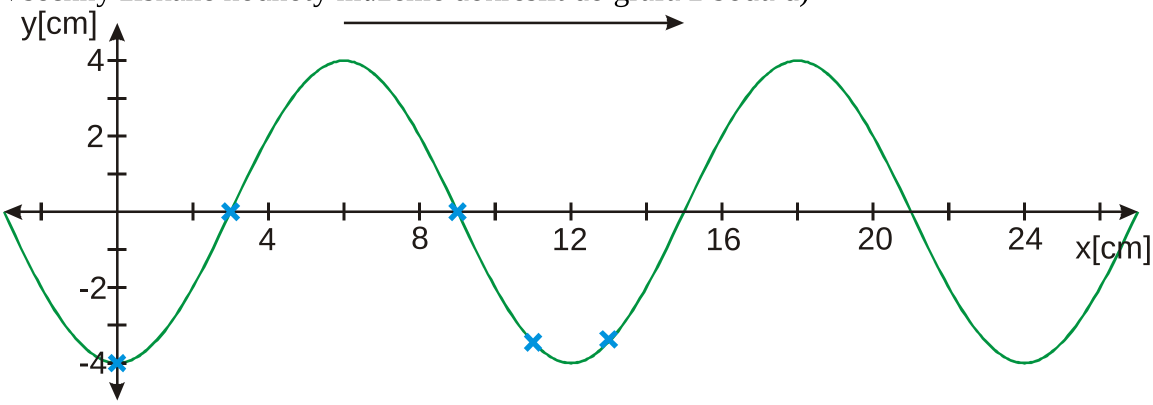
V čas $t = 0{,}45\,\mathrm{s}$ uplyne od času $t = 0\,\mathrm{s}$ tři čtvrtě periody $\Rightarrow$ vlna se posunu doprava o tři čtvrtě vlnové délky $\Rightarrow$ v počátku se zrovna nachází minimum



e) Urči v čase $t = 0,45\,\mathrm{s}$ výšku vodní hladiny v bodech $x = 0; 3; 9; 11; 13$. Získané hodnoty porovnej s výsledky bodu d).
do rovnice vlnění dosazujeme $t = 0,45\,\mathrm{s}$ a:

- $x = 0\,\mathrm{m}:\ y = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12}\right) = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0}{0,12}\right)\mathrm{m} = -0,04\,\mathrm{m}$
- $x = 0,03\,\mathrm{m}:\ y = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12}\right) = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,03}{0,12}\right)\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m}$
- $x = 0,09\,\mathrm{m}:\ y = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12}\right) = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,09}{0,12}\right)\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m}$
- $x = 0,11\,\mathrm{m}:\ y = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12}\right) = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,11}{0,12}\right)\mathrm{m} = -0,035\,\mathrm{m}$
- $x = 0,13\,\mathrm{m}:\ y = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,12}\right) = 0,04 \sin 2\pi\left(\frac{0,45}{0,6} - \frac{0,13}{0,12}\right)\mathrm{m} = -0,035\,\mathrm{m}$

Všechny získané hodnoty můžeme dokreslit do grafu z bodu d)



Př. 4: Vlnění vodní hladiny je popsáno rovnicí $y = 0,03 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{0,06}\right)$.

a) urči výšku vlny v místě zdroje vlnění v čase $t = 1\,\mathrm{s}$
b) urči výšku vlny v místě vzdáleném od zdroje 5,5 cm v čase $t = 1\,\mathrm{s}$.
c) urči poloměr nejmenší kružnice, kterou tvoří body kmitající se stejnou fází jako zdroj vlnění

a) urči výšku vlny v místě zdroje vlnění v čase $t = 1\,\mathrm{s}$

Do rovnice vlnění dosadíme $t = 1\,\text{s}$ a $x = 0\,\text{m}$

$$y = 0{,}03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}06} \right) = 0{,}03 \sin 2\pi \left(\frac{1}{0{,}6} - \frac{0}{0{,}06} \right) \text{m} = -0{,}026\,\text{m}$$

b) urči výšku vlny v místě vzdáleném od zdroje 5,5 cm v čase $t = 1\,\text{s}$.
Do rovnice vlnění dosadíme $t = 1\,\text{s}$ a $x = 0{,}055\,\text{m}$

$$y = 0{,}03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}06} \right) = 0{,}03 \sin 2\pi \left(\frac{1}{0{,}6} - \frac{0{,}055}{0{,}06} \right) \text{m} = 0{,}03\,\text{m}$$

c) urči poloměr nejmenší kružnice, kterou tvoří body kmitající se stejnou fází jako zdroj vlnění
Se stejnou fází kmitají body, které jsou od sebe vzdáleny o celočíselný násobek vlnové délky
$\Rightarrow$ hledaná kružnice má poloměr 6 cm.

Dodatek: Použitá rovnice nepopisuje vlnění vodní plochy ve všech směrech. Popisuje výšku vln pouze na kladné poloose *x*. Na záporné poloose *x* se vlnění šíří opačným směrem (a je tedy popsáno rovnicí $y = 0{,}03 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0{,}6} - \frac{x}{0{,}06} \right)$). V ostatních směrech je rovnice složitější, protože výchylka záleží na druhé souřadnici.

Shrnutí: Dosazováním za čas a *x*-ovou souřadnici do rovnice $y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ můžeme zjistit okamžitou výchylku vlnění v libovolném místě a čase.