1.5.2 Mechanická práce II

Předpoklady: 1501

Př. 1: Těleso o hmotnosti $10\,\mathrm{kg}$ bylo vytaženo pomocí provazu do výšky $2\,\mathrm{m}$; poprvé rovnoměrným přímočarým pohybem, podruhé pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením $2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. V kterém případě bude vykonaná práce větší a proč? Svůj odhad potvrď výpočtem práce, kterou v obou případech vykonala tahová síla provazu.

$m = 10\,\mathrm{kg}$ $\quad h = 2\,\mathrm{m}$ $\quad a = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ $\quad g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ $\quad W_1 = ?$ $\quad W_2 = ?$

Větší práce se musela vykonat v druhém případě. Výsledkem konání práce bude v obou případech stejná změna polohy tělesa (na tu je nutná stejná práce), ve druhém případě, však těleso získá ještě větší rychlost než mělo na počátku zrychlování (na což je opět potřeba vykonat práci) a tím je mu nutné na něm vykonat větší práci.

Výpočet provedeme podle vzorce pro práci. V obou případech je tažná síla rovnoběžná se směrem posunutí můžeme vynechat ve vztahu $\cos\alpha$.

a) tažení rovnoměrným pohybem

$W = Fs$ dosadíme: $F = F_g = m\cdot g$ (síla, kterou táhneme musí vyrovnat tíhu tělesa) $s = h$

$W = F_g h = mgh$

$W = 10\cdot 10\cdot 2\,\mathrm{J} = 200\,\mathrm{J}$

b) tažení zrychleným pohybem

$W = Fs$ dosadíme: $F = F_g + ma = m(g+a)$ (síla, kterou táhneme musí vyrovnat tíhu tělesa a ještě mu udělit zrychlení a) $s = h$

$W = F\cdot h = m(a+g)h$.

$W = 10(2+10)2\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{J}$

Při rovnoměrném přímočarém pohybu vykoná tahová síla provazu práci $200\,\mathrm{J}$, při rovnoměrně zrychleném pohybu $240\,\mathrm{J}$.

Pedagogická poznámka: U bodu b) jde o to, jak dobře se naučili studenti silové rozbory. Opět si opakujeme, že síla provazu musí překonat gravitaci a ještě urychlovat závaží.

Př. 2: Určete práci, kterou vykoná při tažení saní psí spřežení. K tažení saní je nutná síla 250 N, psi potáhnou saně rychlostí $10\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ dvě hodiny. Postroje psího spřežení jsou k saním zapojeny vodorovně.

$F = 250\,\mathrm{N}$ $\quad t = 2\,\mathrm{h} = 7200\,\mathrm{s}$ $\quad v = 10\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 2{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ $\quad \alpha = 0°$ $\quad W = ?$

Hledaná práce je určena vztahem $W = Fs\cos\alpha$. Protože sáně jedou po vodorovné rovině rovnoběžně se směrem síly spřežení je $\cos\alpha = 1$. Dráhu určíme z dráhy, kterou saně urazily, za dobu, kterou je spřežení táhlo.

$W = Fs$ $\quad s = vt$

$W = Fvt$

$\mathrm{W} = 250\cdot 2{,}8\cdot 7200\mathrm{J} = 5{,}04\cdot 10^6\,\mathrm{J}$.

Psí spřežení vykoná práci $5,04 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$.

Př. 3: Na auto, které jede po přibližně rovné dálnici stálou rychlostí 130 km/h, působí proti pohybu vlivem tření a odporu vzduchu stálá síla o velikosti 30 kN. Jak velkou práci auto vykoná během jízdy po dálnici při cestě z Prahy do Poděbrad?

Délka dálnice z Prahy k odbočce na Poděbrady je přibližně 35 km.
Vzorec pro výpočet práce:
$W = Fs = 30000 \cdot 35000\,\mathrm{J} = 1,05 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$
Auto vykoná během jízdy po dálnici práci $1,05 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$.

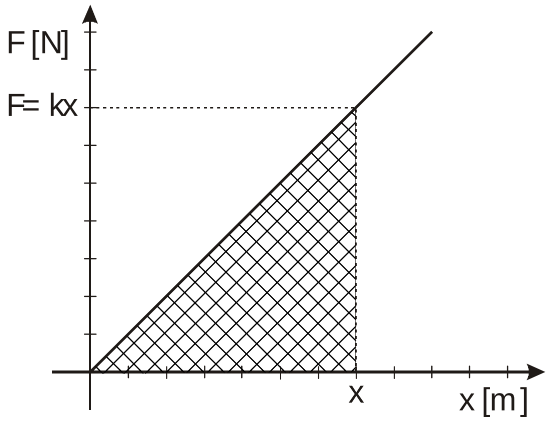
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě na tento okamžik nepřiměřeně jednoduchý, ale zadání obsahuje údaj o rychlosti, který se v příkladu 2 využívá při výpočtu. Některé studenty to dokáže splést.

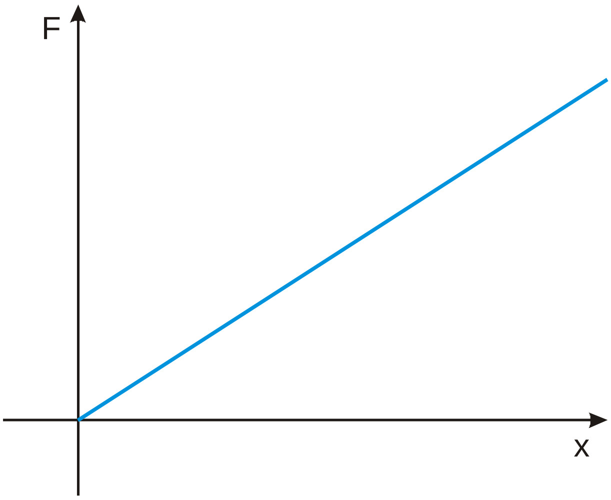
Př. 4: Prodloužení nebo stlačení pružiny je přímo úměrné síle, která na ni působí. Tato přímá úměrnost se uvádí v obráceném pořadí $F = k \cdot x$, kde *F* je působící síla, *x* je prodloužení nebo zkrácení pružiny a *k* je konstanta úměrnosti nazývaná tuhost pružiny.
a) V jakých jednotkách se tato konstanta udává?
b) Urči tuto konstantu pro pružinu odpružení osobního automobilu jehož výška nad vozovkou se po naložení 150 kg sníží o 2 cm. Počítej, že tato hmotnost se rozloží rovnoměrně na všechna čtyři kola.
c) Jaká práce se při naložení nákladu na pružinu vykoná?

$m = 150\,\mathrm{kg}$ $x = 2\,\mathrm{cm} = 0,02\,\mathrm{m}$ $k = ?$ $W = ?$
a) určení jednotek tuhosti pružiny
Jednotky, ve kterých se udává konstanta *k*, určíme dosazením do definičního vztahu.
$F = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{1\mathrm{N}}{1\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{N/m}$

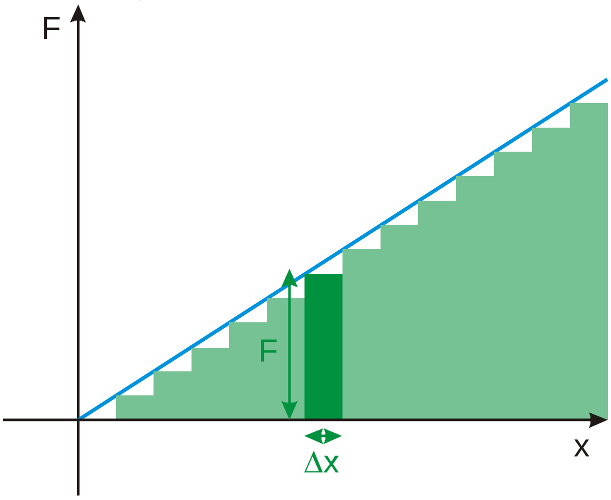
b) určení tuhosti pružiny:
Při naložení nákladu do vozu bude každá pružina stlačována jednou čtvrtinou tíhy nákladu. Tato síla způsobí stlačení pružiny a umožní nám určit tuhost.
$F = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F}{x}$, dosadíme: $F = \frac{1}{4}F_g = \frac{1}{4}mg$
$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{4x} = \frac{150 \cdot 10}{4 \cdot 0,02}\ \mathrm{N/m} = 1,9 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m}$

c) určení vykonané práce:
Vzorec pro práci: $W = F \cdot s$
Problém: síla, kterou je pružina stlačována, se mění s jejím stlačením. Velikost síly je dána vztahem $F = k \cdot x$, síla přímo úměrně roste se stlačením $\Rightarrow$ nemůžeme tedy použít klasický vztah pro práci.
Nakreslíme graf závislosti síly (působící na pružinu) na stlačení pružiny.

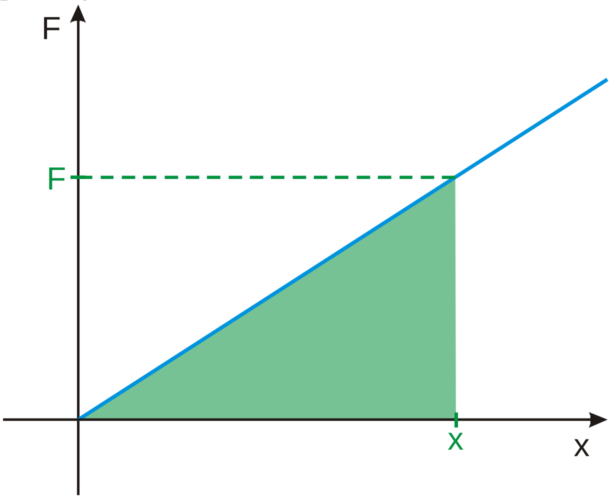




Podobná situace jako při výpočtu dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu $\Rightarrow$ přibližně práci určíme, když budeme předpokládat, že síla je po určitou dobu stálá.



Přesnost výpočtu roste, když zmenšuje Δx, po které předpokládáme konstantní hodnotu síly.
$\Rightarrow$ Práci určíme jako plochu pod grafem závislosti působící síly na dráze (tzn. na stlačení pružiny).



V grafu je nakreslena plocha pod grafem znázorňující vykonanou práci při stlačení od nuly do x - pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $F = kx$ (největší působící síla) a x (největší stlačení).

$W = S_{\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{F \cdot x}{2} = \frac{kx \cdot x}{2} = \frac{1}{2}kx^2$

Dosadíme za k: $k = \frac{mg}{4x}$.

$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{4x}x^2 = \frac{1}{8}mgx$ - práce, kterou vykoná jedna pružina, v autě jsou čtyři $\Rightarrow$

násobíme čtyřmi: $W_C = 4\frac{1}{8}mgx = \frac{1}{2}mgx$

$W_C = \frac{1}{2}mgx = \frac{1}{2}150 \cdot 10 \cdot 0{,}02\,\mathrm{J} = 15\,\mathrm{J}$

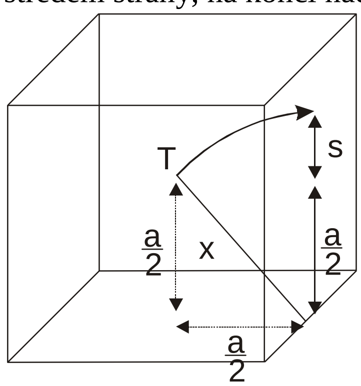
Tuhost pružiny se udává v $\mathrm{N/m}$, tuhost pružiny v autě je $1{,}9 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m}$ a při naložení nákladu byla na pružinách vykonána práce 15 J.

Pedagogická poznámka: Bod c) předchozího příkladu samozřejmě řešíme po krocích se společnou kontrolou na tabuli.

Dodatek: Představa postupného zatěžování pružiny rostoucí silou, odpovídá postupnému přidávání nákladu. Hmotnost nákladu postupně roste, pružina se postupně stlačuje, na každé další malé stlačení je potřebná větší síla.
Naopak je poměrně nepřirozená v případě, že bychom náklad naložili najednou – zdálo by se, že na pružinu celou dobu působila tíha nákladu a síla by tak byla konstantní. Vykonaná práce však má odpovídat celkové změně, která je v tomto případě stejná jako při postupném nakládání. Ve skutečnosti je to tak, že při okamžitém naložení celého nákladu, na počátku jen část tíhy stlačuje pružinu, zbytek uděluje nákladu zrychlení směrem k zemi.

Př. 5: Jak velkou práci vykonáme, překlopíme-li bednu tvaru krychle o hraně **a** [m] a hmotnosti **m** [kg], okolo hrany. Bedna je zajištěna tak, aby se během překlápění neposouvala.

Při překlápění krychle budeme vykonávat práci tím, že budeme zvedat těžiště krychle. Vzdálenost, o kterou těžiště zdvihneme je vidět z obrázku – na počátku se těžiště nachází nad středem strany, na konci nad hranou.



$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$

$s = x - \frac{a}{2} \Rightarrow s = a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}$

$$W = Fs \Rightarrow W = mg\left(a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}\right)[\mathrm{J}]$$

Na převrácení krychle bude třeba práce $W = mg\left(a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}\right)[\mathrm{J}]$.

Shrnutí: