

### 1.1.17 Rovnoměrně zrychlený pohyb v příkladech III

**Předpoklady:** 1116

**Pedagogická poznámka:** Hodinu dělím na dvě části: 15 minut na první dva příklady a zbytek na ostatní. I když všichni nestihnou spočítat druhý příklad je potřeba, aby se rozebrala smysluplnost obou výsledků.

**Př. 1:** Auto během zrychlování z počáteční rychlosti 50 km/h se zrychlením  $2 \text{ m/s}^2$  urazilo dráhu 100 m. Jak dlouho auto zrychlovalo? Jaké rychlosti dosáhlo?

$$v_0 = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s} \quad s = 100 \text{ m} \quad a = 2 \text{ m/s}^2 \quad t = ? \quad v = ?$$

Auto se pohybuje s nenulovou počáteční rychlostí  $\Rightarrow$  musíme použít kompletní sadu rovnic:

$$v = v_0 + at \quad 2 \text{ neznámé veličiny v rovnici}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \text{jedna neznámá veličina v rovnici} \Rightarrow \text{můžeme ihned počítat čas}$$

rovnice je pro čas kvadratická  $\Rightarrow$  nepůjde vyjádřit, rovnou dosadíme a vypočteme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow 100 = 13,9t + \frac{1}{2} 2t^2$$

$$t^2 + 13,9t - 100 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13,9 \pm \sqrt{13,9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2 \cdot 1} = \frac{-13,9 \pm 24,3}{2}$$

$$t_1 = \frac{-13,9 + 24,3}{2} = 5,2 \text{ s} \quad t_2 = \frac{-13,9 - 24,3}{2} = -19,1 \text{ s} - \text{nemá smysl}$$

Nyní můžeme dopočítat dosaženou rychlost:

$$v = v_0 + at = 13,9 + 2 \cdot 5,2 \text{ m/s} = 24,3 \text{ m/s} = 87,5 \text{ km/h}$$

Auto zrychlovalo 5,2 a dosáhlo rychlosti 87,5 km/h.

**Př. 2:** Urči dobu, za kterou vystoupal do výšky 4 m kámen hozený kolmo vzhůru rychlostí 10 m/s. Kámen se pohyboval kvůli přitahování Země se zrychlením  $10 \text{ m/s}^2$ .

$$v_0 = 10 \text{ m/s} \quad s = 4 \text{ m} \quad a = -10 \text{ m/s}^2 \text{ (Země rychlost kamene zmenšuje)} \quad t = ?$$

Kámen se pohybuje s nenulovou počáteční rychlostí  $\Rightarrow$  musíme použít kompletní sadu rovnic:

$$v = v_0 + at \quad 2 \text{ neznámé veličiny v rovnici, rychlost nás ani nezajímá}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \text{jedna neznámá veličina v rovnici} \Rightarrow \text{můžeme ihned počítat čas}$$

rovnice je pro čas kvadratická  $\Rightarrow$  nepůjde vyjádřit, rovnou dosadíme a vypočteme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow 4 = 10t + \frac{1}{2} (-10)t^2$$

$$5t^2 - 10t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{10 \pm 4,5}{10}$$

$$t_1 = \frac{10 + 4,5}{10} = 1,5 \text{ s} \quad t_2 = \frac{10 - 4,5}{10} = 0,6 \text{ s}$$

Smysl mají oba kořeny, kámen dosáhne výšky 4 m během sloupání a poté ještě jednou až bude padat dolů.

Kámen vystoupá do výšky 4 m přibližně za 0,6 s, ve stejné výšce se pak objeví ještě během pádu 1,5 sekundy od vyhození.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklady jsou z hlediska potřebných matematických dovedností asi nejobtížnějším okamžikem v celé středoškolské fyzice. Nejsem si jistý zda má vůbec cenu se jimi zabývat, cena ve formě znechucení studentů je možná příliš vysoká. Já osobně studentům říkám, že z hlediska úprav jde o nejtěžší věc, která rozhodně není ve fyzice nejdůležitější a i v případě, že zrovna těchto pár příklad nezvládnou není to žádná katastrofa. Pokud se jim naopak bude dařit mohou počítat s tím, že matematika by jim při fyzice neměla dělat problémy.

**Pedagogická poznámka:** Je potřeba studentům sdělit, že v žádném případě není cílem, aby si pamatovali vztahy, které v následujících příkladech pro jednotlivé veličiny získají. Jediné, co by si měli pamatovat, je soustava rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

**Př. 3:** Auto během zrychlování z 90 km/h na 130 km/h ujelo dráhu 180 m. Jak dlouho zrychlovalo? Jaké bylo jeho zrychlení? Pro obě veličiny odvoďte obecné vztahy.

$$v_0 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s} \quad v = 130 \text{ km/h} = 36,1 \text{ m/s} \quad s = 180 \text{ m} \quad t = ? \quad a = ?$$

Počáteční rychlost není nulová  $\Rightarrow$  musíme použít kompletní sadu rovnic a z jedné dosadit do druhé:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$s = v_0 \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} \quad \text{vynásobíme rovnici výrazem } 2a$$

$$2as = 2v v_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2v v_0 + v_0^2$$

$$2as = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Čas  $t$  vypočteme obecně nejjednodušeji tak, že výraz pro  $a$  dosadíme do výrazu pro  $t$ .

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$t = \frac{v - v_0}{\frac{v^2 - v_0^2}{2s}} = \frac{v - v_0}{\frac{(v - v_0)(v + v_0)}{2s}} = \frac{2s}{v + v_0}$$

Dosadíme a vypočteme hodnoty:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{36,1^2 - 25^2}{2 \cdot 180} \text{ m/s}^2 \doteq 1,9 \text{ m/s}^2$$

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2 \cdot 180}{36,1 + 25} \text{ s} \doteq 5,9 \text{ s}$$

Auto zrychlovalo se zrychlením  $1,9 \text{ m/s}^2$  přibližně po dobu 6 s.

**Pedagogická poznámka:** Na předchozím příkladu si ukazujeme, že obecný výpočet nám v každém okamžiku umožňuje kontrolovat zda může být výpočet ještě správně.

**Dodatek:** Výhodou obecného řešení je samozřejmě také možnost provést rozměrovou zkoušku (dosazením jednotek):

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\text{m}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \text{výsledek může být správně.}$$

**Př. 4:** Bruslař po rozjetí jel rovnoměrně zpomaleným pohybem 15 s než narazil rychlostí 1 m/s do svého kamaráda. Jaká byla jeho počáteční rychlost pokud rovnoměrně zpomaleným pohybem ujel 45 m?

$$v = 1 \text{ m/s} \quad s = 45 \text{ m} \quad t = 15 \quad v_0 = ?$$

Počáteční rychlost není nulová  $\Rightarrow$  musíme použít kompletní sadu rovnic. Nezajímá nás zrychlení  $\Rightarrow$  vyjádříme ho z první rovnice a dosadíme do druhé:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{v - v_0}{t} t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} (v - v_0) t$$

$$2s = 2v_0 t + vt - v_0 t$$

$$2s = v_0 t + vt$$

$$2s - vt = v_0 t$$

$$v_0 = \frac{2s - vt}{t} = \frac{2s}{t} - v$$

$$v_0 = \frac{2s}{t} - v = \frac{2 \cdot 45}{15} - 1 \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

Bruslař se pohyboval počáteční rychlostí 5 m/s.

**Př. 5:** Pokud řidič sundá nohu z plynu, zpomalí automobil na rovině o 10 km/h během 4 sekund. Jak daleko před vesnicí musí na rovné silnici řidič sundat nohu z plynu, aby ušetřil palivo tím, že během samovolně zpomalování z 90 km/h přesně na 50 km/h auto nebude žádné palivo spotřebovávat?

$$\Delta t = 4 \text{ s} \quad \Delta v = 10 \text{ km/h} = 2,78 \text{ m/s} \quad v_0 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s} \quad v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$$

$$s = ?$$

Auto se během dojíždění k vesnici pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem. Velikost zpomalení tohoto pohybu je zadaná (ale trochu skrytě). Počáteční i koncová rychlost jsou nenulové  $\Rightarrow$  musíme použít kompletní soustavu rovnic. Čas nás nezajímá  $\Rightarrow$  vyjádříme si ho z první rovnice a dosadíme do druhé:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$s = v_0 \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} = \frac{2v v_0 - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

**Dosazení:**

$$\text{Výpočet zrychlení: } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2,78}{4} \text{ m/s}^2 = -0,70 \text{ m/s}^2$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{13,9^2 - 25^2}{2 \cdot (-0,7)} \text{ m} = 308 \text{ m}$$

Auto musí začít zpomalovat 308 m před vesnicí.

**Př. 6:** Strojvůdce nákladního vlaku jedoucího rychlostí 54 km/h spatřil při výjezdu ze zatáčky auto stojící na přejezdu. Přestože začal ihned brzdit, vlak do auta narazil přibližně rychlostí 36 km/h. Spočtete zrychlení vlaku a dobu, kterou vlak brzdil, když výjezd ze zatáčky je od přejezdu vzdálen 125 m. Jak se změnilo zpomalení vlaku, když před sebou tlačil vrak automobilu ještě 25 m?

$$v_1 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s} \quad v_2 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s} \quad v_3 = 0 \text{ m/s} \quad s_1 = 125 \text{ m} \quad s_2 = 25 \text{ m}$$

$$a_1 = ? \quad t_1 = ? \quad a_2 = ?$$

Popisovaný děj se skládá ze dvou rovnoměrně zpomalených pohybů. Nejdříve vlak zpomalil z rychlosti  $v_1$  na rychlost  $v_2$  na dráze 125 m. Potom rovnoměrně zpomalil z rychlosti  $v_2$  na rychlost  $v_3 = 0 \text{ m/s}$  na dráze 25 m. Odvodíme vzorec pro výpočet zrychlení a použijeme jej pro obě části pohybu.

Z rovnice pro rychlost vyjádříme čas

$$v = v_0 + at \Rightarrow \frac{v - v_0}{a} = t$$

Dosadíme do rovnice pro dráhu:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

$$s = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$2s = \frac{2v_0 v - 2v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a}$$

$$2sa = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Dosazením výsledku do vztahu pro čas získáme vztah pro jeho určení.

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{\frac{v^2 - v_0^2}{2s}} = \frac{2s}{v + v_0}$$

**Dosazení:**

1. část pohybu, platí  $v_0 = v_1$ ,  $v = v_2$  a  $s = s_1$ .

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s_1} = \frac{10^2 - 15^2}{2 \cdot 125} \text{ m/s}^2 = -0,5 \text{ m/s}^2$$

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2s_1}{v_2 + v_1} = \frac{2 \cdot 125}{10 + 15} \text{ s} = 10 \text{ s}$$

2. část pohybu, platí  $v_0 = v_2$ ,  $v = v_3 = 0 \text{ m/s}$  a  $s = s_2$  ..

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2s_2} = \frac{0^2 - 10^2}{2 \cdot 25} \text{ m/s}^2 = -2 \text{ m/s}^2$$

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2s_2}{v_3 + v_2} = \frac{2 \cdot 25}{0 + 10} \text{ s} = 5 \text{ s}$$

Vlak brzdil se zrychlením  $-0,5 \text{ m/s}^2$  po dobu 10 s, po srážce se jeho zrychlení zvětšilo čtyřikrát na hodnotu  $-2 \text{ m/s}^2$ .

**Poznámka:** Ve skutečnosti se zpomalení vlaku zvětšilo méně, protože část z rychlosti 36 km/h, kterou měl, když narážel do auta, vlak ztratil při nárazu do auta tím, že ho uvedl do pohybu. Počáteční rychlost na počátku druhého zpomalování tak byla o něco menší.

**Shrnutí:**