## 1.1.15 Řešení příkladů na rovnoměrně zrychlený pohyb I

**Předpoklady:** 1114

**Pedagogická poznámka:** Cílem hodiny je, aby se studenti naučili samostatně řešit příklady. Aby dokázali najít vztah, který umožňuje příklad vyřešit, dokázali ze vztahů vyjadřovat, případně dosazovat z jednoho vztahu do druhého.
Mají s tím obrovské potíže. Druhým problémem je jejich odpor k obecnému řešení. Nezbývá nic jiného než chodit mezi lavicemi a vyžadovat, aby příklady obecně doopravdy dopočítali.
Zůstává otázkou, zda je vůbec reálné u normální třídy (bez probraného vyjadřování ze vzorců v matematice) počítání na úrovni z této a následujících hodinách probírat.

**Př. 1:** Auto před vjezdem do vesnice zpomalilo za 3 s z 90 km/h na 50 km/h. S jakým zrychlení se pohybovalo? Jakou při brždění urazilo dráhu?

$t = 3\,\text{s}$ $\quad v_0 = 90\,\text{km/h} = 25\,\text{m/s}$ $\quad v = 50\,\text{km/h} = 13{,}9\,\text{m/s}$ $\quad a = ?$ $\quad s = ?$

Rovnice zrychleného pohybu:

$v = v_0 + at$

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $\Rightarrow$ zrychlení můžeme vypočítat z první rovnice a získanou hodnotu pak můžeme dosadit do druhé rovnice

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{13{,}9 - 25}{3}\,\text{m/s}^2 = -3{,}7\,\text{m/s}^2$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 25 \cdot 3 + \frac{1}{2}(-3{,}7) \cdot 3^2\,\text{m} = 58{,}4\,\text{m}$$

Auto brzdilo se zrychlením $-3{,}7\,\text{m/s}^2$ a urazilo při tom dráhu 58,4 m.

**Pedagogická poznámka:** Dráha pohybu by se samozřejmě dala počítat i obecně, ale v tuto chvíli je to bezpochyby nad možnosti studentů.

V předchozím příkladu se nám opět ukázalo, že stejně jako u rychlosti i u zrychlení má znaménko svůj význam.

**záporné zrychlení = zrychlení, které zmenšuje rychlost**

V některých případech se pro pohyb, který se zpomaluje (tedy se záporným zrychlením) používá jiná sada rovnic – rovnice pro rovnoměrně zpomalený pohyb:

- $v = v_0 - at$
- $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$

záporné znaménko před členy se zrychlením má stejný význam jako dosazení záporného čísla za zrychlení.
My si nebudeme plést hlavy a budeme důsledně používat jenom původní rovnice a dosazovat do nich záporné zrychlení.

**Př. 2:** Závodní automobil zrychlí z 0 km/h na 100 km/h za 4,3 s. Urči dráhu, kterou při zrychlování ujede.

$v_0 = 0$ $\quad v = 100\,\text{km/h} = 27{,}8\,\text{m/s}$ $\quad t = 4{,}3\,\text{s}$ $\quad s = ?$

Rovnice zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí:

$v = at \qquad s = \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ v obou rovnicích máme dvě neznámé veličiny $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme $a$ (které nepotřebujeme) a dosadíme za $a$ do druhé rovnice:

$v = at \;\Rightarrow\; a = \frac{v}{t}$

$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v}{t}t^2 = \frac{1}{2}vt$

Dosadíme: $s = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}27{,}8 \cdot 4{,}3\,\text{m} = 60\,\text{m}$

Auto ujede během zrychlování 60 m.

**Pedagogická poznámka:** Začátek příkladu je nutné spočítat společně, zbytek by měli dělat studenti sami (i když jde v podstatě jen o matematiku), opisování úprav z tabule má nulový přínos.

Postup, který jsme použili u předchozího (a budeme používat u dalších příkladů):

- podle fyzikální situace rozhodneme, zda budeme používat celou soustavu rovnic $v = v_0 + at$, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ nebo pouze zjednodušenou verzi $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$ s nulovou počáteční rychlostí
- podle veličin známých se zadání se rozhodneme, zda můžeme počítat pouze s jednou z rovnic, nebo budeme muset z jedné vyjádřit a dosadit do druhé
- vypočteme vztah pro zadanou veličinu
- dosadíme do upraveného vztahu

**Pedagogická poznámka:** Studenti by si měli postup stručně někam napsat a při práci v lavicích by si měli hlídat, že podle něj postupují. Nejčastěji studenti (hlavně kluci) vyjadřují zbrkle ze složitější soustavy nebo nedopočítávají vztahy.

**Př. 3:** Za bezpečný doskok je považován takový, při kterém člověk dopadne na zem maximálně rychlost 8 m/s. Urči maximální výšku, ze které je možné bezpečně skákat na Zemi (zrychlení padajících předmětů je $10\,\text{m/s}^2$) a na Měsíci (zrychlení padajících předmětů je 6 x menší než na Zemi).

$v_0 = 0$ $\quad v = 8\,\text{m/s}$ $\quad a_Z = 10\,\text{m/s}^2$ $\quad s = ?$

Rovnice zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí:

$v = at \qquad s = \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ v obou rovnicích máme dvě neznámé veličiny $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme $t$ (které nepotřebujeme) a dosadíme za $t$ do druhé rovnice:

$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$

$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$

Bezpečná výška pro Zemi: $s_Z = \frac{v^2}{2a_Z} = \frac{8^2}{2 \cdot 10}\,\text{m} = 3,2\,\text{m}$

Zrychlení na Měsíci: $a_M = \frac{a_Z}{6} = \frac{10}{6}\,\text{m/s}^2 = 1,67\,\text{m/s}^2$

Bezpečná výška pro Měsíc: $s_M = \frac{v^2}{2a_M} = \frac{8^2}{2 \cdot 1,67}\,\text{m} = 19,2\,\text{m}$

Na Zemi je bezpečné skákat z výšky 3,2 m na Měsíci dokonce z výšky 19,2 m.

**Poznámka:** Z předchozího příkladu je vidět jedna z výhod obecného řešení – do výsledného jednoduchého vztahu můžeme ihned dosazovat různá zadání.

**Př. 4:** Urči jakou rychlostí dopadne na zem kámen puštěný z výšky 10 m (2. patro). Předpokládej, že padá rovnoměrně zrychleně se zrychlením $10\,\text{m/s}^2$.

$v_0 = 0\,\text{m/s}$ $\quad s = 10\,\text{m}$ $\quad a = 10\,\text{m/s}^2$ $\quad v = ?$

Jde o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí:

$v = at$

$s = \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ ani z jedné rovnice není možné vypočítat *v* (v obou jsou dvě neznámé) $\Rightarrow$ z první si vyjádříme *t* (abychom ve vyjádření neměli odmocninu, která by se objevila, kdybychom vyjadřovali *t* ze druhé rovnice) a dosadíme do druhé

$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$

$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$

$s = \frac{v^2}{2a} \quad / 2a$

$v^2 = 2sa$

$v = \sqrt{2sa} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10}\,\text{m/s} = 14,1\,\text{m/s} = 50,9\,\text{km/h}$

Kámen dopadne na zem rychlostí 50,9 km/h.

**Pedagogická poznámka:** Studenti se těžko smiřují s tím, že počítají rychlost a přesto dosazují z rovnice rychlosti do rovnice pro dráhu. Je potřeba zdůraznit, že možné jsou oba postupy, ale kvůli vyhnutí se odmocninám je vždy jednodušší vyjadřovat z rovnice pro rychlost a dosazovat do rovnice pro dráhu. Roli nehraje to, která z veličin byla v rovnici původně vyjádřena, ale to, zda v rovnici zůstali pouze veličiny, které známe nebo které chceme počítat.

**Př. 5:** Jaké je zrychlení kulky v hlavni, je-li její úsťová rychlost 700 m/s a délka hlavně 40 cm? Jak dlouho je kulka během výstřelu v hlavni? Pro obě veličiny odvoď obecné vztahy.

$v = 700\,\text{m/s}$ $\quad s = 40\,\text{cm} = 0,4\,\text{m}$ $\quad v_0 = 0\,\text{m/s}$ $\quad a = ?$ $\quad t = ?$

Budeme předpokládat, že kulka se v hlavni pohybuje rovnoměrně zrychleně. Protože konečná rychlost a dráha nevystupují společně ani v jedné rovnici, budeme muset jednu z neznámých vyjádřit z rovnice pro rychlost a dosadit ji do rovnice pro dráhu.

$$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$$

Dosadíme do rovnice pro dráhu:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

Získaný vzorec pro zrychlení můžeme použít při odvozování vzorce pro čas:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{v^2}{2s}} = \frac{2s}{v}$$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{700^2}{2 \cdot 0,4}\,\text{m/s}^2 = 612500\,\text{m/s}^2$$

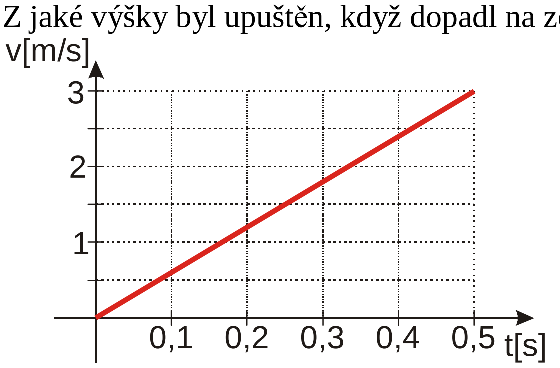
$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 0,4}{700}\,\text{s} = 0,0011\,\text{s}$$

Zrychlení kulky v hlavni je $612500\,\text{m/s}^2$, kulka je v hlavni $0,0011\,\text{s}$.

**Pedagogická poznámka:** Vnímavější studenti mají problémy s výslednou hodnotou zrychlení (zdá se jim příliš velká). Ujistěte je, že číslo je opravdu reálné.

**Pedagogická poznámka:** K následujícím příkladům se většina studentů nedostane, není to žádný problém. Pokud se jim podaří spočítat prvních 5 jde o úspěch, následující příklady jsou sice zajímavé, ale není nutné, aby je řešili všichni.

**Př. 6:** Na obrázku je graf rychlosti padajícího nafukovacího míče. Urči jeho zrychlení. Z jaké výšky byl upuštěn, když dopadl na zem za 0,7 s?




$t_d = 0,7\,\text{s}$ $\quad$ hodnoty vyčtené z grafu $v = 3\,\text{m/s}$ $\quad t = 0,5\,\text{s}$ $\quad v_0 = 0\,\text{m/s}$ $\quad a = ?$ $\quad s = ?$

Pomocí hodnot vyčtených z grafu můžeme určit zrychlení míče a přímým dosazením do rovnice pro dráhu vypočteme výšku, ze které byl míč upuštěn.

$$v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t}$$

$$s = \frac{1}{2}at_d^2$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{3}{0,5}\,\mathrm{m/s^2} = 6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$s = \frac{1}{2}at_d^2 = \frac{1}{2}6 \cdot 0,7^2\,\mathrm{m} = 1,47\,\mathrm{m} \doteq 1,5\,\mathrm{m}$$

Míč padal se zrychlením $6\,\mathrm{m/s^2}$ a byl upuštěn z výšky 1,5 m.

**Poznámka:** K určení zrychlení bychom mohli použít i jinou dvojici hodnot rychlosti a času získaných z grafu.
Pro určení zrychlení by bylo možné použít i definiční vztah pro zrychlení

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3}{0,5}\,\mathrm{m/s^2} = 6\,\mathrm{m/s^2}$$

**Př. 7:** Padající nafukovací míč získal během 0,3 s rychlost 1,8 m/s. Za jak dlouho získá rychlost 3 m/s? Předpokládej rovnoměrně zrychlený pohyb.

$t_1 = 0,3\,\mathrm{s}$ $\quad v_1 = 1,8\,\mathrm{m/s}$ $\quad v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$ $\quad t = ?$

Míč se pohyboval rovnoměrně zrychleně s nulovou počáteční rychlostí.
Pro oba okamžiky platí rovnice pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu:

$v_1 = at_1$ $\qquad v_2 = at_2$

Po celou dobu se pohybuje se stejným zrychlením. Z první rovnice můžeme zrychlení vypočítat a dosadit do druhé.

$$v_1 = at_1 \Rightarrow a = \frac{v_1}{t_1}$$

$$v_2 = at_2 = \frac{v_1}{t_1}t_2$$

$$v_2 = \frac{v_1}{t_1}t_2$$

$$\frac{v_2}{v_1}t_1 = t_2$$

$$t_2 = \frac{v_2}{v_1}t_1 = \frac{3}{1,8}0,3\,\mathrm{s} = 0,5\,\mathrm{s}$$

Padající míč získá rychlost 3 m/s za 0,5 s.

**Shrnutí:**